Domácí úkol ze cvičení 9 - 10 – základní pojmy u funkcí více proměnných

1. Pokuste se rozhodnout, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

   b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

2. „Mechanické" derivování.
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

   a) $f(x,y)=\exp(x^2-y-\frac{x}{y})$; b) $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$); c) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$;

   Zjistěte, kde jsou dané funkce diferencovatelné a určete v těchto bodech jejich diferenciál.

3. Základní „slovíčka":
   Je dána funkce f a bod (x_0,y_0) (a vyberte si) :

   i) $f(x,y)=4\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}$, $(x_0,y_0)=(0,-3)$

   ii) $f(x,y)=\arcsin\left(x^2-y\right)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$

   a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   b) Vypočítejte $\nabla f(x_0,y_0)$.
   c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0) a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f.
   d) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0).
   e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.
   f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?

4. Extrémy :
   Vyšetřete v R^2 lokální extrémy (pokuste se i o vyšetření globálních extrémů) následujících funkcí:

   a) $f(x,y)=12xy-x^2y-xy^2$;
   b) $f(x,y)=(x-y)^2+(y-1)^3$;
   c) $f(x,y)=x^2+y^2-2y$;
   d) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

A můžete zkusit i trošku „hezčí" příklad:

5. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x|\geq|y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.

   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   b) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.
   d) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.